УДК 517.5

О. Ф. Герус (Житомир. держ. ун-т)

ПРО ГІПЕРГОЛОМОРФНІ ФУНКЦІЇ ПРОСТОРОВОЇ ЗМІННОЇ

For quaternionic-differentiable functions of a spatial variable, we prove a theorem on an integral over a closed surface. This theorem is an analog of the Cauchy theorem from complex analysis.

Для кватернионно дифференцируемых функций пространственной переменной доказана теорема об интеграле по замкнутой поверхности, являющаяся аналогом теоремы Коши из комплексного анализа.

1. Вступ. Початком розвитку гіперкомплексного аналізу у просторі $\mathbb{R}^3$ була робота Г. Моісіла і Н. Теодореско [1] (див. також [2]), у якій уперше запропоновано тривимірний аналог системи рівнянь Коші – Рімана. Р. Фютер [3] побудував її чотиривимірне узагальнення та уперше увів клас „регулярних” кватерніонних функцій як таких, що задовольняють запропоновану ним систему. Це дозволило довести кватерніонні аналоги теореми Коші, інтегральної формули Коші, теореми Ліувілля та побудувати аналог ряду Лорана. На даний час кватерніонний аналіз набув широкого розвитку (детальніше див. [4 – 7]), у першу чергу, завдяки його фізичним застосуванням. При цьому гіперголоморфними прийнято називати функції, які мають у даній області неперервні частинні похідні та задовольняють вищезгадану систему рівнянь.

У роботі [4] доведено теорему про інтеграл від гіперголоморфних функцій по замкненій кусково-гладкій поверхні, яка є просторовим аналогом теореми Коші з комплексного аналізу. При цьому було використано кватерніонну формулу Стокса для обмежених областей з кусково-гладкою межею та функцій, які мають неперервні частинні похідні у замиканні області. У даній роботі ми розглядаємо більш слабке означення гіперголоморфної функції, вимагаючи лише диференційовність її компонент та виконання умов типу Коші – Рімана, подібно до одного з означень голоморфної функції у комплексному аналізі (див. [8]), та доводимо аналог теореми Коші для функцій, гіперголоморфних за новим означенням.

2. Кватерніони. Кватерніонні гіперголоморфні функції. Нехай $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ — алгебра комплексних кватерніонів

$$a = \sum_{k=0}^{3} a_k \boldsymbol{i_k},$$

де $\{a_k\}_{k=0}^3 \subset \mathbb{C}$, $\boldsymbol{i}_0 = 1$ — одиниця, $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ — уявні кватерніонні одиниці з правилом множення $\boldsymbol{i}_1{}^2 = \boldsymbol{i}_2{}^2 = \boldsymbol{i}_3{}^2 = \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3 = -1$. Норма кватерніона визначається формулою

$$|a| := \sqrt{\sum_{k=0}^{3} |a_k|^2}.$$

Розглянемо дійсні векторні кватерніони $z := z_1\boldsymbol{i}_1 + z_2\boldsymbol{i}_2 + z_3\boldsymbol{i}_3$, що є точками евклідового простору $\mathbb{R}^3$, наділеного додатково структурою кватерніонного множення.

Нехай Ω — область у просторі $\mathbb{R}^3$. Для функцій $f\colon \Omega \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$, які мають частинні похідні першого порядку, розглянемо диференціальні оператори

$$D_l[f] := \sum_{k=1}^{3} \boldsymbol{i_k} \frac{\partial f}{\partial z_k},$$

$$D_r[f] := \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial z_k} \boldsymbol{i_k}.$$

Означення 1. *Функція* $f := f_0 + f_1\boldsymbol{i_1} + f_2\boldsymbol{i_2} + f_3\boldsymbol{i_3}$ *називається ліво- або право-* $\mathbb{H}$*-диференційовною в точці* $z_0 \in \mathbb{R}^3$, *якщо її компоненти* $f_0,\ f_1,\ f_2,\ f_3$ *є* $\mathbb{R}^3$*-диференційовними функціями в* z_0 *і справджується відповідно умова*

$$D_l[f](z_0) = 0 \tag{1}$$

або

$$D_r[f](z_0) = 0. \tag{2}$$

Це означення є аналогом відомого у комплексному аналізі означення $\mathbb{C}$-диференційовної функції (див. [8, с. 33, 34]). Відомо (див. там же), що $\mathbb{C}$-диференційовність комплексної функції рівносильна існуванню її похідної. У гіперкомплексному аналізі такої рівносильності немає. Зокрема, у кватерніонному аналізі мають похідну лише лінійні функції певного вигляду (див. [9]).

Оператор D_l називається оператором Дірака [10] або оператором Моісіла – Теодореско [11], а рівність (1) рівносильна системі рівнянь Моісіла – Теодореско [1].

Означення 2. *Функція* f *називається ліво-гіперголоморфною або право-гіперголоморфною в області* Ω, *якщо вона відповідно ліво- або право-* $\mathbb{H}$*-диференційовна у кожній точці цієї області.*

У відомих роботах (див., наприклад, [11]) означення гіперголоморфних функцій містили додаткову умову неперервності частинних похідних компонент функції f.

Позначимо через $\nu(z) := \nu_1(z)\boldsymbol{i}_1 + \nu_2(z)\boldsymbol{i}_2 + \nu_3(z)\boldsymbol{i}_3$ одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні Γ, яка є межею області Ω, в тих точках z, де він існує.

Теорема 1. *Нехай* P *— поверхня замкненого куба, який міститься в однозв'язній області* Ω, *функція* $f\colon \Omega \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *— право-гіперголоморфна, а функція* $g\colon \Omega \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *— ліво-гіперголоморфна. Тоді справедлива формула*

$$\iint\limits_{P} f(z)\,\nu(z)\,g(z)\,ds = 0, \tag{3}$$

де $\nu(z)$ *— одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні* P *у тих точках* z, *де він існує.*

Зауваження. Формулу (3) було доведено раніше (див. [4]) для замкнених кусково-гладких поверхонь при додатковій умові неперервності частинних похідних від функцій f та g.

Доведення. Припустимо супротивне, тобто

$$\left|\iint\limits_{P} f(z)\,\nu(z)\,g(z)\,ds\right| = M > 0.$$

Позначимо через U площу поверхні P, поділимо куб на вісім рівних кубів і позначимо через $P^{(1)}$ поверхню з площею $\dfrac{U}{4}$ того з них, який задовольняє умову

$$\left|\iint\limits_{P^{(1)}} f(z)\,\nu(z)\,g(z)\,ds\right| \geqslant \frac{M}{8}.$$

Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність вкладених кубів з поверхнями $P^{(n)}$ площею $\dfrac{U}{4^n}$, що задовольняють умову

$$\left|\iint\limits_{P^{(n)}} f(z)\,\nu(z)\,g(z)\,ds\right| \geqslant \frac{M}{8^n}. \tag{4}$$

За принципом Кантора існує єдина спільна для всіх кубів точка $z^{(0)} = z_1^{(0)}\boldsymbol{i}_1 + z_2^{(0)}\boldsymbol{i}_2 + z_3^{(0)}\boldsymbol{i}_3$. Завдяки диференційовності функції f та g в околі точки $z^{(0)}$ подаються у вигляді

$$f(z) = f(z^{(0)}) + \sum_{m=1}^{3}(z_m - z_m^{(0)})\frac{\partial f(z^{(0)})}{\partial z_m} + \gamma(z, z^{(0)})\rho,$$

$$g(z) = g(z^{(0)}) + \sum_{m=1}^{3}(z_m - z_m^{(0)})\frac{\partial g(z^{(0)})}{\partial z_m} + \gamma_1(z, z^{(0)})\rho,$$

де $\gamma(z, z^{(0)})$, $\gamma_1(z, z^{(0)})$ — кватерніоннозначні нескінченно малі функції при

$$\rho := \left|z - z^{(0)}\right| \to 0.$$

Тому для всіх достатньо малих кубів маємо

$$\iint\limits_{P^{(n)}} f(z)\,\nu(z)\,g(z)\,ds = f(z^{(0)})\iint\limits_{P^{(n)}} \nu(z)\,ds\,g(z^{(0)}) +$$

$$+ f(z^{(0)})\sum_{m=1}^{3}\iint\limits_{P^{(n)}} \nu(z)\,(z_m - z_m^{(0)})\,ds\,\frac{\partial g(z^{(0)})}{\partial z_m} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{3}\frac{\partial f(z^{(0)})}{\partial z_m}\iint\limits_{P^{(n)}}(z_m - z_m^{(0)})\,\nu(z)\,ds\,g(z^{(0)}) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{3}\frac{\partial f(z^{(0)})}{\partial z_m}\sum_{k=1}^{3}\iint\limits_{P^{(n)}}(z_m - z_m^{(0)})\,\nu(z)\,(z_k - z_k^{(0)})ds\,\frac{\partial g(z^{(0)})}{\partial z_k} +$$

$$+f(z^{(0)})\iint\limits_{P^{(n)}}\nu(z)\,\gamma_1(z,z^{(0)})\,\rho\,ds+\iint\limits_{P^{(n)}}\gamma(z,z^{(0)})\,\rho\,\nu(z)\,ds\,g(z^{(0)})+$$

$$+\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial f(z^{(0)})}{\partial z_m}\iint\limits_{P^{(n)}}(z_m-z_m^{(0)})\,\nu(z)\,\gamma_1(z,z^{(0)})\,\rho\,ds+$$

$$+\sum_{m=1}^{3}\iint\limits_{P^{(n)}}\gamma(z,z^{(0)})\,\rho\,\nu(z)(z_m-z_m^{(0)})\,ds\frac{\partial g(z^{(0)})}{\partial z_m}+$$

$$+\iint\limits_{P^{(n)}}\gamma(z,z^{(0)})\,\nu(z)\gamma_1(z,z^{(0)})\,\rho^2\,ds. \qquad (5)$$

Далі нам знадобиться кватерніонна формула Остроградського (див. [4])

$$\iint\limits_{\Gamma}f(z)\,\nu(z)\,g(z)\,ds=\iiint\limits_{\Omega}\left(D_r[f](z)\,g(z)+f(z)\,D_l[g](z)\right)dz_1dz_2dz_3, \qquad (6)$$

де Ω — обмежена область з кусково-гладкою межею Γ, а функції $f\colon\overline{\Omega}\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ та $g\colon\overline{\Omega}\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ мають неперервні частинні похідні в $\overline{\Omega}$.

Перший інтеграл у правій частині рівності (5) за формулою (6) дорівнює нулю.

Другий та третій інтеграли за формулою (6) зводяться відповідно до вигляду

$$f(z^{(0)})\,V_n\sum_{m=1}^{3}\boldsymbol{i}_m\frac{\partial g(z^{(0)})}{\partial z_m},\quad V_n\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial f(z^{(0)})}{\partial z_m}\boldsymbol{i}_m\,g(z^{(0)}),$$

де V_n — об'єм куба $K^{(n)}$, обмеженого поверхнею $P^{(n)}$. Завдяки умовам (1), (2) вони також дорівнюють нулю.

Застосування формули (6) до четвертого інтеграла зводить його до вигляду

$$\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial f(z^{(0)})}{\partial z_m}\boldsymbol{i}_m\sum_{k=1}^{3}\iiint\limits_{K^{(n)}}(z_k-z_k^{(0)})\,dz_1dz_2dz_3\,\frac{\partial g(z^{(0)})}{\partial z_k}+$$

$$+\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial f(z^{(0)})}{\partial z_m}\iiint\limits_{K^{(n)}}(z_m-z_m^{(0)})\,dz_1dz_2dz_3\sum_{k=1}^{3}\boldsymbol{i}_k\frac{\partial g(z^{(0)})}{\partial z_k},$$

тому він дорівнює нулю за умовами (1), (2).

Довжина ребра n-го куба дорівнює $\dfrac{\sqrt{U}}{2^n\sqrt{6}}$, тому $\rho\leqslant\dfrac{\sqrt{U}}{2^n\sqrt{2}}$. Для довільного $\varepsilon>0$ і для всіх кубів, починаючи з деякого, виконуються нерівності $\left|\gamma(z,z^{(0)})\right|<\varepsilon$, $\left|\gamma_1(z,z^{(0)})\right|<\varepsilon$. Тому з урахуванням того, що модуль добутку двох кватерніонів не перевищує добутку їх модулів, помноженого на $\sqrt{2}$ (див. лему 2.1 роботи [12]), маємо

$$\left|f(z^{(0)})\iint\limits_{P^{(n)}}\nu(z)\,\gamma_1(z,z^{(0)})\rho\,ds\right|<\frac{\sqrt{2}\,U^{3/2}}{8^n}\,|f(z^{(0)})|\,\varepsilon, \qquad (7)$$

$$\left| \iint\limits_{P^{(n)}} \gamma(z, z^{(0)})\, \rho\, \nu(z)\, ds\, g(z^{(0)}) \right| < \frac{\sqrt{2}\, U^{3/2}}{8^n}\, |g(z^{(0)})|\, \varepsilon. \tag{8}$$

Модулі сьомого, восьмого та дев'ятого інтегралів разом оцінюються виразом

$$\frac{U^2}{16^n} \left(\sum_{m=1}^{3} \left| \frac{\partial f(z^{(0)})}{\partial z_m} \right| + \sum_{m=1}^{3} \left| \frac{\partial g(z^{(0)})}{\partial z_m} \right| + 1 \right) \varepsilon. \tag{9}$$

З рівності (5) та нерівностей (4), (7) – (9) випливає

$$\varepsilon \left(\sqrt{2}\, U^{3/2} \left(|f(z^{(0)})| + |g(z^{(0)})| \right) + \right.$$
$$\left. + U^2 \left(\sum_{m=1}^{3} \left(\left| \frac{\partial f(z^{(0)})}{\partial z_m} \right| + \left| \frac{\partial g(z^{(0)})}{\partial z_m} \right| \right) + 1 \right) \right) > M.$$

Отримана суперечність доводить теорему.

Нехай $\delta > 0$,

$$\omega_\Gamma(f, \delta) := \sup_{\substack{|z_1 - z_2| \leqslant \delta \\ z_1, z_2 \in \Gamma}} |f(z_1) - f(z_2)|$$

— модуль неперервності функції f на Γ, $\Gamma_{z,\delta} := \{\zeta \in \Gamma \colon |\zeta - z| \leqslant \delta\}$, $\mathrm{mes}\, \Gamma_{z,\delta}$ — поверхнева міра множини $\Gamma_{z,\delta}$, $d(\Gamma)$ — діаметр поверхні Γ.

Лема 1. *Якщо функції f, g неперервні на кусково-гладкій поверхні Γ, яка є межею обмеженої області, то*

$$\left| \iint\limits_{\Gamma} f(z)\, \nu(z)\, g(z)\, ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\ \mathrm{mes}\, \Gamma \left(\omega_\Gamma(f, d(\Gamma)) \max_{z \in \Gamma} |g(z)| + \omega_\Gamma(g, d(\Gamma)) \max_{z \in \Gamma} |f(z)| \right). \tag{10}$$

Доведення. Завдяки формулі (6) маємо

$$\iint\limits_{\Gamma} f(z_0)\, \nu(z)\, g(z_0)\, ds = 0$$

для довільної точки $z_0 \in \Gamma$. Тому

$$\iint\limits_{\Gamma} f(z)\, \nu(z)\, g(z)\, ds = \iint\limits_{\Gamma} (f(z) - f(z_0))\, \nu(z)\, g(z_0)\, ds +$$
$$+ \iint\limits_{\Gamma} f(z)\, \nu(z)\, (g(z) - g(z_0))\, ds,$$

звідки і випливає оцінка (10).

Теорема 2. *Нехай Ω — обмежена область з кусково-гладкою межею Γ, яка для довільних $z \in \mathbb{R}^3$, $\delta > 0$ задовольняє умову*

$$\frac{d(\Gamma_{z,\delta})}{\operatorname{mes}\Gamma_{z,\delta}} \leqslant \Lambda, \tag{11}$$

де Λ — додатна стала, функція $f\colon \Omega \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ є право-гіперголоморфною, а функція $g\colon \Omega \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ — ліво-гіперголоморфною, f та g неперервні в замиканні $\overline{\Omega}$. Тоді

$$\iint\limits_{\Gamma} f(z)\,\nu(z)\,g(z)\,ds = 0. \tag{12}$$

Доведення. Обмежимося випадком однозв'язної області (загальний випадок зводиться до даного стандартними міркуваннями, такими ж, як і в теорії комплексних голоморфних функцій). Розіб'ємо простір площинами, перпендикулярними координатним осям, на куби з ребром довжини

$$\varepsilon < \frac{d(\Gamma)}{3\sqrt{3}}. \tag{13}$$

Нехай $\{K_j\}$, $j \in J$, — скінченна множина кубів, які перетинаються з поверхнею Γ, K'_j — куби з ребрами довжини 3ε з тими ж центрами, що і K_j.

Оцінимо суму діаметрів кубів K_j. Завдяки умові (13) поверхня Γ перетинає межу $\partial K'_j$ куба K'_j. Тому, згідно з нерівністю (11), площа $\operatorname{mes}(\Gamma \cap K'_j)$ частини поверхні Γ в кубі K'_j задовольняє умову

$$\operatorname{mes}(\Gamma \cap K'_j) \geqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}\Lambda}. \tag{14}$$

З іншого боку,

$$\sum_{j\in J} \operatorname{mes}(\Gamma \cap K'_j) \leqslant 27\,\operatorname{mes}\Gamma, \tag{15}$$

бо $\operatorname{mes}\Gamma = \sum_{j\in J} \operatorname{mes}(\Gamma \cap K_j)$, а в сумі $\sum_{j\in J} \operatorname{mes}(\Gamma \cap K'_j)$ кожна з площ $\operatorname{mes}(\Gamma \cap K_j)$ враховується не більше 27 разів. З нерівностей (14), (15) отримуємо

$$\sum_{j\in J} d(K_j) = \sum_{j\in J} \varepsilon\sqrt{3} \leqslant 3\Lambda \sum_{j\in J} \operatorname{mes}(\Gamma \cap K'_j) \leqslant 71\,\Lambda\,\operatorname{mes}\Gamma. \tag{16}$$

Інтеграл (12) можна записати у вигляді

$$\iint\limits_{\Gamma} f(z)\,\nu(z)\,g(z)\,ds = \sum_{j\in J} \iint\limits_{\partial(\Omega\cap K_j)} f(z)\,\nu(z)\,g(z)\,ds +$$

$$+ \sum_{K_j\subset\Omega} \iint\limits_{\partial(K_j)} f(z)\,\nu(z)\,g(z)\,ds. \tag{17}$$

За теоремою 1 друга сума в рівності (17) дорівнює нулю.

Кожна з множин $\Omega \cap K_j$ складається з скінченної або зчисленної сукупності зв'язних компонент. Застосувавши до межі кожної з таких компонент оцінку (10), отримаємо

$$\left|\iint\limits_{\partial(\Omega\cap K_j)} f(z)\,\nu(z)\,g(z)\,ds\right| \leqslant 2(\mathrm{mes}(\Gamma\cap K_j)+6\varepsilon^2)\left(\omega_\Gamma(f,\varepsilon\sqrt{3})\max_{z\in\overline{\Omega}}|g(z)|+\right.$$

$$\left.+\,\omega_\Gamma(g,\varepsilon\sqrt{3})\max_{z\in\overline{\Omega}}|f(z)|\right). \qquad (18)$$

Підставляючи нерівність (18) у рівність (17), одержуємо

$$\left|\iint\limits_{\Gamma} f(z)\,\nu(z)\,g(z)\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\mathrm{mes}\,\Gamma + 6\sum_{j\in J}\varepsilon^2\right)\left(\omega_\Gamma(f,\varepsilon\sqrt{3})\max_{z\in\overline{\Omega}}|g(z)| + \omega_\Gamma(g,\varepsilon\sqrt{3})\max_{z\in\overline{\Omega}}|f(z)|\right).$$

З нерівності (16) випливає

$$\sum_{j\in J}\varepsilon^2 \leqslant \sum_{j\in J}\varepsilon \leqslant \frac{71\,\Lambda}{\sqrt{3}}\,\mathrm{mes}\,\Gamma,$$

тому

$$\left|\iint\limits_{\Gamma} f(z)\,\nu(z)\,g(z)\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant (284\sqrt{3}\,\Lambda + 2)\,\mathrm{mes}\,\Gamma\left(\omega_\Gamma(f,\varepsilon\sqrt{3})\max_{z\in\overline{\Omega}}|g(z)| + \omega_\Gamma(g,\varepsilon\sqrt{3})\max_{z\in\overline{\Omega}}|f(z)|\right).$$

Переходячи тут до границі при $\varepsilon\to 0$, отримуємо рівність (12).

Теорему доведено.

1. *Moisil G. C., Theodoresco N.* Functions holomorphes dans l'espace // Mathematica (Cluj). – 1931. – **5**. – P. 142 – 159.
2. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 204 с.
3. *Fueter R.* Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen // Comment. math. helv. – 1936. – **8**. – P. 371 – 378.
4. *Kravchenko V. V., Shapiro M. V.* Integral representations for spatial models of mathematical physics // Res. Notes Math. Ser. – 1996. – **351**. – 247 p.
5. *Gürlebeck K., Sprössig W.* Quaternionic and Clifford calculus for physicists and engineers. – John Wiley & Sons, 1997. – 384 p.
6. *Sudbery A.* Quaternionic analysis // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1979. – **85**. – P. 199 – 225.
7. *Kravchenko V. V.* Applied quaternionic analysis // Res. and Expos. Math. Ser. – 2003. – **28**. – 136 p.
8. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Часть 1. Функции одного переменного. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
9. *Мейлихзон А. С.* По поводу моногенности кватернионов // Докл. АН СССР. – 1948. – **59**, № 3. – С. 431 – 434.
10. *Cnops J.* An introduction to Dirac operators on manifolds // Progr. Math. Phys. – 2002. – **24**. – 211 p.
11. *Blaya R. A., Reyes J. B., Shapiro M.* On the Laplasian vector fields theory in domains with rectifiable boundary // Math. Meth. Appl. Sci. – 2006. – **29**. – P. 1861 – 1881.
12. *Gerus O. F., Shapiro M. V.* On a Cauchy-type integral related to the Helmholtz operator in the plane // Bol. Soc. mat. mexic. – 2004. – **10**, № 1. – P. 63 – 82.

Одержано 21.12.10,
після доопрацювання — 10.03.11